ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:

• Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο $c\in(\alpha,\beta)$
Τότε $\exists\delta>0$ τέτοιο ώστε:

• Αν $f'(c)>0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)>f(c), & x\in(c,c+\delta) \\ f(x)<f(c), & x\in(c-\delta,c) \end{cases}$

• Αν $f'(c)<0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)<f(c), & x\in(c,c+\delta) \\ f(x)>f(c), & x\in(c-\delta,c) \end{cases}$

Άσκηση

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και τέτοια ώστε:
$f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)>0$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$: $f(c)=0$

ΛΥΣΗ

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας είναι $f'(\alpha), f'(\beta)$ ομόσημα και μάλιστα: $f'(\alpha)>0$ και $f'(\beta)>0$.

$$f'(\alpha)>0 \Rightarrow \lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}>0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}>0,\ \alpha<x<\alpha+\delta$$

όπου $x-\alpha>0$ και άρα $f(x)-f(\alpha)>0 \Rightarrow f(x)>f(\alpha)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in(\alpha,\alpha+\delta)$

Επίσης,

$$f'(\beta)>0 \Rightarrow \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}>0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}>0,\ \beta-\delta<x<\beta$$

όπου $x-\beta<0$ και άρα $f(x)-f(\beta)<0 \Rightarrow f(x)<f(\beta)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)<0,\ \forall x\in(\beta-\delta,\beta)$.

Άρα, επιλέγοντας ένα $x_1\in(\alpha,\alpha+\delta)$ και ένα $x_2\in(\beta-\delta,\beta)$ τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ όπου η f συνεχής και αφού $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$, τότε από Θ. Bolzano $\exists c\in(x_1,x_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(c)=0$.